Теория вероятностей

Первый модуль, 2025/2026

Катышев П.К.
профессор математики
pkatish@nes.ru

Описание курса

Курс «Теория вероятностей» является первым в ряду вероятностно-эконометрических курсов Вероятность – Статистика – Эконометрика.

Основные цели курса

- изложить основы теории вероятностей;
- сформировать теоретические основы для изучения математической статистики и эконометрики;
- познакомиться с принципами вероятностно-статистического моделирования.

Курс состоит из четырех основных частей:

1. Основы теория вероятностей. Простейшие вероятностные схемы.
2. Случайные величины и случайные векторы.
3. Производящие функции. Многомерное нормальное распределение.
4. Предельные теоремы: закон больших чисел, центральная предельная теорема. Асимптотическая нормальность.

Требования к курсу, система оценивания, правила посещения занятий

Предполагается, что студенты знают математический анализ и линейную алгебру в объеме стандартных университетских курсов.
Курс состоит из четырнадцати лекций (28 часов) и семи семинаров (14 часов). Студенты должны выполнить шесть еженедельных домашних заданий. Каждая домашняя работа оценивается по 100-балльной системе. Общая оценка за домашние работы есть сумма оценок за каждую работу, деленная на шесть. По окончании курса проводится письменный экзамен, оцениваемый по 100-балльной системе. На экзамене разрешено пользоваться записями на одном листе бумаги формата А4. Оценка за курс (по 100-балльной системе) складывается из 80% оценки за экзамен и 20% оценки за домашние работы. Эта оценка переводится в оценку

по пятибалльной системе. **Если оценка за экзамен меньше 25 баллов, то независимо от остальных оценок студент получает за курс неудовлетворительную оценку.** Переэкзаменовка имеет тот же формат, что и основной экзамен.

Содержание курса

I. Основы теории вероятностей. Простейшие вероятностные схемы (3 лекции)

1. Эксперимент со случайным исходом.
2. Вероятностное пространство. Случайные события. Действия с событиями.
3. Конечные вероятностные пространства. Классическая вероятность. Элементы комбинаторики.
4. Геометрическая вероятность.
5. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события.
6. Общее вероятностное пространство. Сигма-алгебра случайных событий. Вероятность, ее свойства. Продолжение вероятности с алгебры событий на порожденную ею сигма-алгебру.

II. Случайные величины и случайные векторы (6 лекций)

1. Случайная величина, ее распределение. Дискретные и непрерывные случайные величины.
2. Числовые характеристики случайных величин (среднее значение, дисперсия, медиана и т.п.).
3. Примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
4. Случайные векторы их распределения.
5. Независимые случайные величины. Ковариация, коэффициент корреляции.
6. Условное распределение.

III. Производящая функция. Многомерное нормальное распределение (2 лекции)

1. Определение производящей функции случайной величины и случайного вектора. Свойства производящих функций.
2. Многомерное нормальное распределение. Его свойства.
3. Распределения, связанные с нормальным распределением (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера). Лемма Фишера.

IV. Предельные теоремы (2 лекции)

1. Виды сходимостей последовательностей случайных величин: почти наверное, в среднем, по вероятности, по распределению.
2. Связь сходимости производящих функций и сходимости распределений.
3. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел.
4. Центральная предельная теорема. Нормальное приближение биномиального и пуассоновского распределений.
5. Асимптотическая нормальность.

Примеры заданий на курсе

Теоретический материал, излагаемый на лекциях, сопровождается многочисленными примерами. На семинарах, в основном, решаются задачи по темам текущих лекций.

Выборочные задачи семинаров

Задача 1. Пусть X – случайная величина, имеющая непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F(x)$. Найдите распределение случайной величины $F(X)$.

Задача 2. Пусть X_1, X_2 – независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение: $P(X_i = k) = q_i^{k-1} p_i$, $k = 1,2,...$, $p_i + q_i = 1$, $i = 1,2$.
(а) Докажите, что случайная величина $Y = \min(X_1, X_2)$ также имеет геометрическое распределение.
(б) Найдите $E(Y)$.

Задача 3. Найти среднее и дисперсию показательной случайной величины.

Выборочные задачи домашних работ.

Задача 1. Прибор состоит из двух блоков. Время безотказной работы каждого блока имеет показательное распределение с параметрами $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, причем отказ каждого блока происходит независимо от другого. Прибор выходит из строя, если хотя бы один блок выходит из строя. Чему равно среднее время безотказной работы прибора?

Задача 2. На отрезке [0, 1] оси *Ox* случайным образом выбирается точка (всё происходит на координатной плоскости). Пусть X – расстояние от этой точки до точки (0, 1). Найдите плотность распределения случайной величины *X*.

Задача 3. Пусть X_1, X_2 – независимые пуассоновские случайные величины с параметрами λ_1, λ_2 соответственно.
а) Найти условное распределение $p_n(k) = \Pr(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n)$, $k = 0,1,...,n$. б) Найти $E(X_1 \mid X_1 + X_2 = n)$.

Выборочные экзаменационные задачи.

Задача 1 10 очков
Способность работника предприятия описывается случайной величиной θ, которая может принимать значения 0 или 1 с равными вероятностями. Производительность работника в течение дня $t = 1,2$ есть $y_t = \theta + \varepsilon_t$, где ε_t, $t = 1,2$ – производственные шоки.
Предполагается, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – независимые случайные величины, не зависящие от θ и принимающие значения 0 и 1 с вероятностями q и p, соответственно, $p + q = 1$.
Наблюдаются величины y_1, y_2. Найдите апостериорное распределение способности θ для всех возможных значений наблюдений y_1, y_2.

Задача 2
Пусть $A_1 = [\xi_1, \eta_1]'$, $A_2 = [\xi_2, \eta_2]'$, $A_3 = [\xi_3, \eta_3]'$ – независимые двумерные стандартные нормальные векторы, рассматриваемые как точки на двумерной плоскости.
(а) Найдите распределение длины медианы A_1M_1 треугольника $A_1A_2A_3$.

(б) Найдите среднее значение этой длины.

Задача 3

Интеграл $J = \int_0^1 e^x dx$ вычисляется методом Монте-Карло, т.е. разыгрывается n независимых случайных величин $x_1,\ldots,x_n$, равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$, и интеграл J оценивается величиной $J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$. Найдите число n так, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.95, величина J_n отличалась бы от J не более, чем на $\varepsilon = 0.02$.

Материалы курса

Обязательная литература

1. Sh. Ross. A First Course in Probability, Pearson, Prentice Hall, 2009
2. Гнеденко Б.В. (1988). Курс теории вероятностей, Москва: «Наука».

Дополнительная литература

1. А.Н.Ширяев. Вероятность, МЦНМО, 2011
2. Чистяков В.П. (2000) Курс теории вероятностей (5-е издание). М., «Агар».

Политика академической честности

Списывание, плагиат и любые другие нарушения академической этики в РЭШ не допускаются.